Prof : Chortani Atef

3 Math+Sc

Nombres complexes

Exercice N °1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives $Z_A = -2i$; $Z_B = 1+i$; $Z_C = 4+2i$ et $Z_I = 2$

1) a) Placer sur une figure les points A, B, C et I.
   b) Vérifier que le point I est le milieu de [AC].

2) a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b) Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

3) Soit D le symétrique de B par rapport au point I.
   a) Déterminer l'affixe Z_D du point D.
   b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice N°2:

1/ Mettre sous forme algébrique les nombres complexes
$z_1 = \dfrac{2+6i}{3-i}$, $z_2 = (1-i)(1+2i)$ et $z_3 = \dfrac{4i}{i-1}$

2/ Placer dans Le plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2i$; $z_B = 3+i$ et $z_C = 2-2i$

3/ Montrer que ABC et un triangle isocèle rectangle

4/ Soit D le point d'affixe $(-1-i)$; Montrer que ABCD est un carré.

Exercice N °3

On pose $z_1 = 1+i\sqrt{3}$; $z_2 = 1+i$ et $Z = z_1/z_2$

1) Mettre sous forme algébrique le nombre complexe Z.

2) a) Mettre z_1, z_2 et Z sous forme trigonométrique.
   b) En déduire cos (π/12) et sin (π/12).

Exercice N °4

Représenter l'ensemble des points M d'affixes Z tels que.

a) $|Z+1-i| = |Z+1+i|$; b) $|(1-i\sqrt{3})Z-1| = |2Z|$; c) $|Z-1| = 2$; d) $|iZ+1| = 1$

Exercice N °5

Résoudre dans ℂ les équations suivantes :

1) a) $Z^2 = -1$; $3Z^2 = -9$; b) $Z = \overline{Z}$; c) $Z = -\overline{Z}$

2) a) $Z^2 - 4Z + 1 = 0$; b) $2Z^2 + 5Z - 3 = 0$; c) $Z^2 + 2Z + 5 = 0$

3) *a)* $Z^3 - 4Z^2 + Z = 0$; b) $Z^3 - 8 = 0$; c) $Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

Exercice N °6

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
On considère la fonction f de variable complexe Z définie sur ¢ par :
$f(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\,Z^2 + 4\,(1 + i\sqrt{3}\,)\,Z - 8i$.

1) a) Calculer $f(2i)$.

   b) Vérifier que $f(Z) = (Z - 2i)\,(Z^2 - 2\sqrt{3}\,Z + 4)$.

   c) Vérifier que $Z^2 - 2\sqrt{3}\,Z + 4 = (Z - \sqrt{3}\,)^2 + 1$

   d) Résoudre dans ¢ l'équation $f(Z) = 0$.

2) On considère les nombres complexes suivants : $Z_1 = \sqrt{3} - i$; $Z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z_3 = 2i$

   a) Placer, dans le plan P les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3

   b) Calculer $|Z_1|$; $|Z_2|$ et $|Z_3|$.
   En déduire que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un même cercle que l'on précisera.

3) a) Montrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme.

   b) Calculer $|Z_2 - Z_1|$ et $|Z_2 - Z_3|$. Interpréter géométriquement.

   c) En déduire que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

Exercice N °7:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.
(ξ) est le cercle trigonométrique et $Z = \cos\alpha + \sin\alpha$ est l'affixe d'un point M du cercle (ξ) où α est un réel de l'intervalle $[0, \pi/2]$.

1) Soit $U = Z^3$ et $V = 2Z$
   Ecrire chacun des nombres complexes U et V sous la forme trigonométrique.

2) Soit $W = 2Z - Z^3$ et A, B, et C les points d'affixes respectives U, V et W

   a) Placer, dans le plan P les points A, B et C dans le cas où α est égal à $\pi/3$.

   b) Déterminer les réels α pour les quelles les points O, A et B sont alignés.

3*)* On suppose, dans la suite, que $\alpha \in]\,0, \pi/2[$

   a) Montrer que le quadrilatère OABC est un parallélogramme.

   b) Déterminer le réel α pour que le quadrilatère OABC soit un rectangle.

Exercice N °8

Dans le plan complexe on considère le point M d'affixe z, $z \neq -2i$ et on pose $Z' = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i}$

1) Si $z = x + i\,y$, $(x, y) \in IR^2$; donner la forme algébrique de Z' en fonction de x et y

2) Déterminer l'ensemble E des points M tel que $Z' \in IR$

3) Déterminer l'ensemble F des points M tel que $Z' \in iIR$

4) Déterminer l'ensemble G des points M tel que $|Z'| = 1$

5) Soit A le point d'affixe $z_A = -2i$.

Montrer que si M décrit le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$ le point M' (Z') varie sur un cercle que l'on précisera. (Vérifier que z s'écrit $z = -2i + \sqrt{5}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha), \alpha \in [0, 2\pi]$)